VII.1

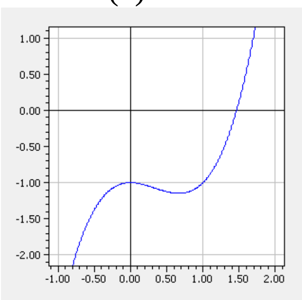
Aussagen über eine Funktion unter Verwendung der Ableitungen

VON HEINZ BÖER

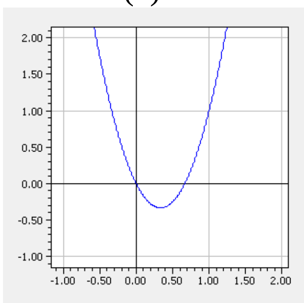
Grafen lassen sich beschreiben durch Ablesen von Punkten. Eine zweite, genauere Charakterisierung gibt zusätzlich an, wie stark der Funktionsgraf in den Punkten steigt durch Nutzung von f '(x). Auch die Beschreibung kann man noch einen Schritt genauer machen, indem man angibt, ob die Steigung in dem Punkt abnehmend oder zunehmend ist bzw. ob der Graf eine Rechts- oder Linkskurve ist. Dazu nutzt man die Steigungsfunktion zu f '(x), nämlich f ''(x).

Beispiel:

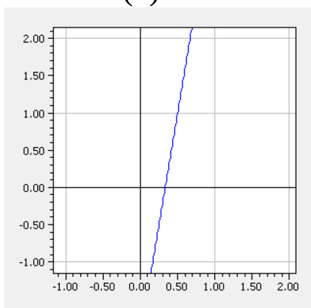
f(x)



f '(x)



f ''(x)



Beschreibung des Verlaufs von f:
Der Graf steigt bis zum Punkt (0|-1), nimmt dann ab bis etwa (0,7|-1,1), um von dort immer weiter zu steigen.

Beschreibung von f unter Nutzung von f ':
Der Graf nimmt mit positiver, allerdings abnehmender Steigung zu bis zum Hochpunkt (0|-1), wo er die Steigung 0 erreicht. Dann fällt er (negative Steigung) bis zum Tiefpunkt (0,7|-1,1), wo er wieder die Steigung 0 hat. Danach steigt er mit zunehmender positiver Steigung.

Beschreibung von f unter Nutzung von f ' und f '':
Der Graf steigt als Rechtskurve bis zum Hochpunkt (0|-1), wo er die Steigung 0 hat. Er fällt dann – immer noch als Rechtskurve – bis zum Wendepunkt (0,7|-1,1). Dort ist die Steigung minimal bzw. die 2. Ableitung hat dort den Wert 0 mit Vorzeichenwechsel. Danach verläuft der Graf zu f als Linkskurve mit zunächst negativer Steigung bis zum Tiefpunkt (0,7|-1,1), wo er die Steigung 0 erreicht. Weiter geht es – immer noch als Linkskurve – mit positiver Steigung.

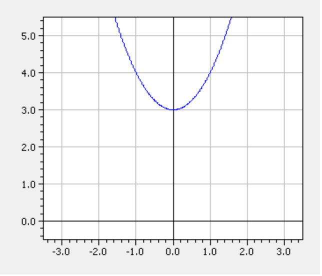
> Regel: Bei Rechtskurven nimmt die Steigung permanent ab, also ist dort f ''(x) < 0, bei Linkskurven nimmt die Steigung immer zu und es gilt f ''(x) > 0.
> In einem Wendepunkt W wechselt die Kurvenform und es gilt f ''(x_W) = 0.

Beispiele:

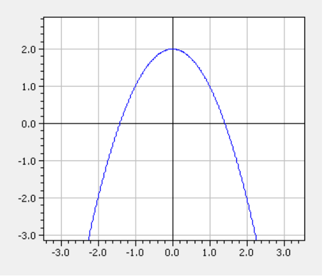
Suchen Sie unter den drei Funktionsgrafen A, B, C die aus, für die gilt:

1. f '(1) > 0 2. f ''(0,33) = 0 3. f '(-1) < 0 4. f ''(x) < 0

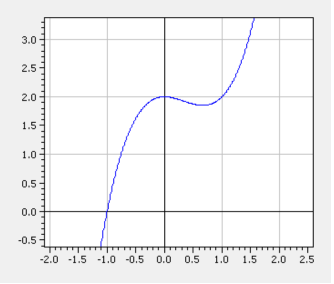
A



B



C



Zu 1) A, C: Legt man bei Graf A im Punkt (1/4) bzw. bei Graf C im Punkt (1/2) die Tangente an, so ist zu sehen, dass sie steigt. Also hat der Graf dort eine positive Steigung. Bei Graf B ist die Steigung im Punkt (1/1) negativ.

Zu 2) Die zweite Ableitung ist in den Grafenbeispielen Null, wenn die Kurve von einer Links- in eine Rechtskurve übergeht oder umgekehrt; wenn also eine Wendestelle vorliegt. Nur im Graf C geht die Kurve etwa im Punkt (0,33/1,9) von einer Rechts- in eine Linkskurve über. Nur dort ist die Bedingung 2 erfüllt. Also: C.

Zu 3) A: Nur beim Graf A ist die Tangente im Punkt (-1/4) fallend, die Steigung also negativ. Bei Graf B ist die Steigung in (-1/1), bei Graf C in (-1/0) jeweils positiv.

Zu 4) f ''(x) ist negativ für alle x-Werte, wenn die zugehörige f '(x)-Kurve immer fällt; d.h. die Steigung der f(x)-Kurve oben nimmt für alle x-Werte ab; oder: die Kurve zu f(x) ist eine Rechtskurve. Das trifft nur für B zu: Von großen positiven Steigungswerten nimmt die Steigung auf Null ab bis x = 0, wird danach negativ und fällt immer stärker. Also: B.
In der Kurve zu C gibt es Teilbereiche (Intervalle), für die Bedingung zutrifft. Aber für die Bedingung wurden keine Einschränkungen genannt. Sie sollte für alle x-Wertew gelten.

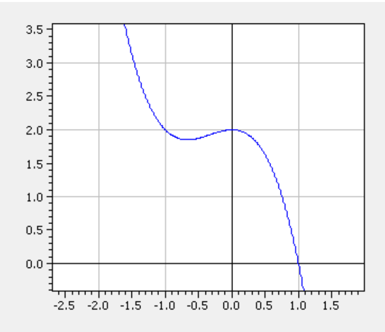
Übungen

Übung 1:

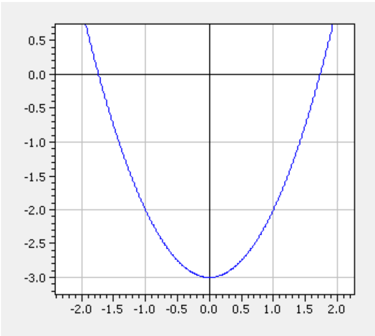
Suchen Sie unter den drei Funktionsgrafen A, B, C die aus, für die gilt:

1. f '(1) > 0 2. f ''(-1) > 0 3. f '(0) = 0 4. f ''(x) > 0

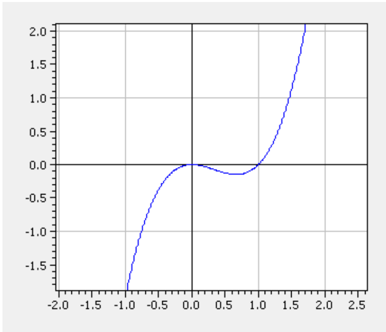
A



B



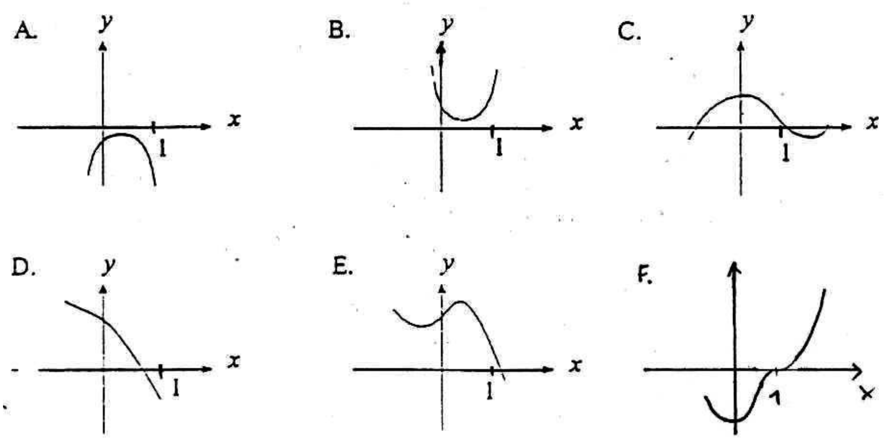
C



Begründen Sie jeweils kurz Ihre Entscheidung.

Übung 2:

Notieren Sie, welche der Grafen A bis F die angegebene Eigenschaft hat.



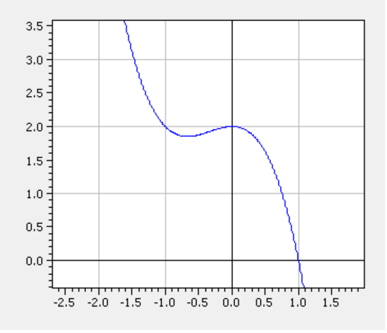
1. f '(0) > 0
2. f '(1) < 0
3. f '(x) ist immer negativ.
4. Der Graf zu f '(x) ist keine Gerade.
5. Der Graf hat mindestens einen Wendepunkt.
6. Der Graf hat 2 Wendepunkte.
7. f '(0) = 0
8. f ''(0) > 0
9. f ''(0) = 0
10. f '(1) = f ''(1) = 0
11. f ''(x) wechselt das Vorzeichen nicht.
12. Der Graf zu f '(x) hat ein lokales Maximum.

Übung 3:

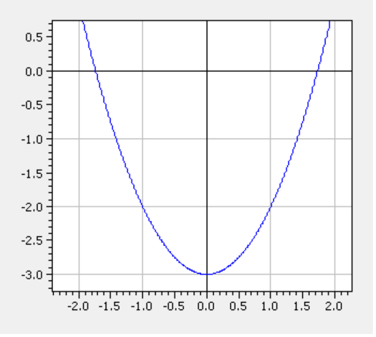
Notieren Sie für die drei Funktionsgrafen A, B, C, wo die genannte Bedingung gilt:

1. f '(x) > 0   2. f ''(x) > 0   3. f '(x) = 0   4. f ''(x) < 0   5. . f '(x) < 0

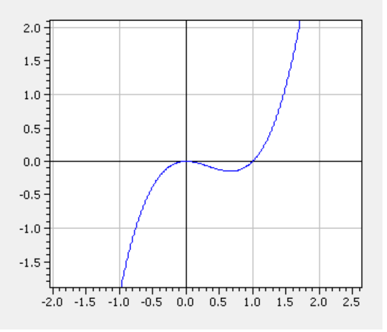
A



B



C



Übung 4:

Beschreiben Sie den Grafen zu f unter Nutzung von f ' und f ''.

f(x)